



СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ

8
1
20
21

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

- 14 вариантов заданий
- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

14 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2018

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 ЕГЭ 2018. Математика. 14 вариантов. Профильный уровень. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; под ред. **И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2018. — 79, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Тесты от разработчиков»)

ISBN 978-5-377-12362-0 (Издательство «Экзамен»)

ISBN 978-5-4439-2580-6 (МЦНМО)

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Типовые тестовые задания по математике содержат 14 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2018 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2018 г. по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 25.08.2017. Формат 60×90/8.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 3,71.
Усл. печ. л. 10. Тираж 7000 экз. Заказ 0729.

ISBN 978-5-377-12362-0 (Издательство «Экзамен»)

ISBN 978-5-4439-2580-6 (МЦНМО)

- © Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э., 2018
- © Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы	7
Вариант 1	
Часть 1	8
Часть 2	10
Вариант 2	
Часть 1	12
Часть 2	14
Вариант 3	
Часть 1	16
Часть 2	18
Вариант 4	
Часть 1	21
Часть 2	23
Вариант 5	
Часть 1	25
Часть 2	27
Вариант 6	
Часть 1	29
Часть 2	31
Вариант 7	
Часть 1	33
Часть 2	35
Вариант 8	
Часть 1	37
Часть 2	39
Вариант 9	
Часть 1	41
Часть 2	43
Вариант 10	
Часть 1	46
Часть 2	48
Вариант 11	
Часть 1	50
Часть 2	52

Вариант 12	
Часть 1	54
Часть 2	56
Вариант 13	
Часть 1	58
Часть 2	60
Вариант 14	
Часть 1	62
Часть 2	64
Ответы	
Вариант 1	66
Вариант 2	66
Вариант 3	66
Вариант 4	67
Вариант 5	67
Вариант 6	67
Вариант 7	68
Вариант 8	68
Вариант 9	68
Вариант 10	69
Вариант 11	69
Вариант 12	69
Вариант 13	70
Вариант 14	70
Решение заданий	
Вариант 4. Часть 2	73



Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:



Регион	Код предмета	Название предмета	С правилами экзамена ознакомлен и согласен Соединение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка	Номер варианта
□□	□□	□□□□□□□□□□		□□□

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

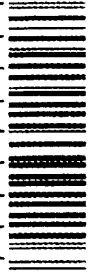
Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;">1</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>2</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>3</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>4</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>5</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>6</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>7</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>8</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>9</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>10</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>11</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>12</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>13</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>14</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>15</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>16</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>17</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>18</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>19</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>20</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> </table>	1	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	2	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	3	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	4	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	5	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			6	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	7	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	8	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	9	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	10	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			11	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	12	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	13	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	14	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	15	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			16	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	17	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	18	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	19	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	20	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px;">21</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>22</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>23</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>24</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>25</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>26</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>27</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>28</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>29</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>30</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>31</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>32</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>33</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>34</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>35</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td>36</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>37</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>38</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>39</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> <tr><td>40</td><td>□□□□□□□□□□□□□□□□□□</td></tr> </table>	21	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	22	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	23	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	24	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	25	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			26	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	27	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	28	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	29	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	30	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			31	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	32	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	33	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	34	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	35	□□□□□□□□□□□□□□□□□□			36	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	37	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	38	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	39	□□□□□□□□□□□□□□□□□□	40	□□□□□□□□□□□□□□□□□□
1	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
2	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
3	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
4	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
5	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
6	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
7	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
8	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
9	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
10	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
11	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
12	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
13	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
14	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
15	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
16	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
17	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
18	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
19	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
20	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
21	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
22	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
23	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
24	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
25	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
26	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
27	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
28	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
29	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
30	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
31	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
32	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
33	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
34	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
35	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
36	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
37	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
38	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
39	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												
40	□□□□□□□□□□□□□□□□□□																																																																																												

□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□	□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□	□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□	□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□	□□-□□□□□□□□□□□□□□□□□□

▶ Единый государственный экзамен

▶ ***Бланк
ответов № 2***



Регион

Код
предмета

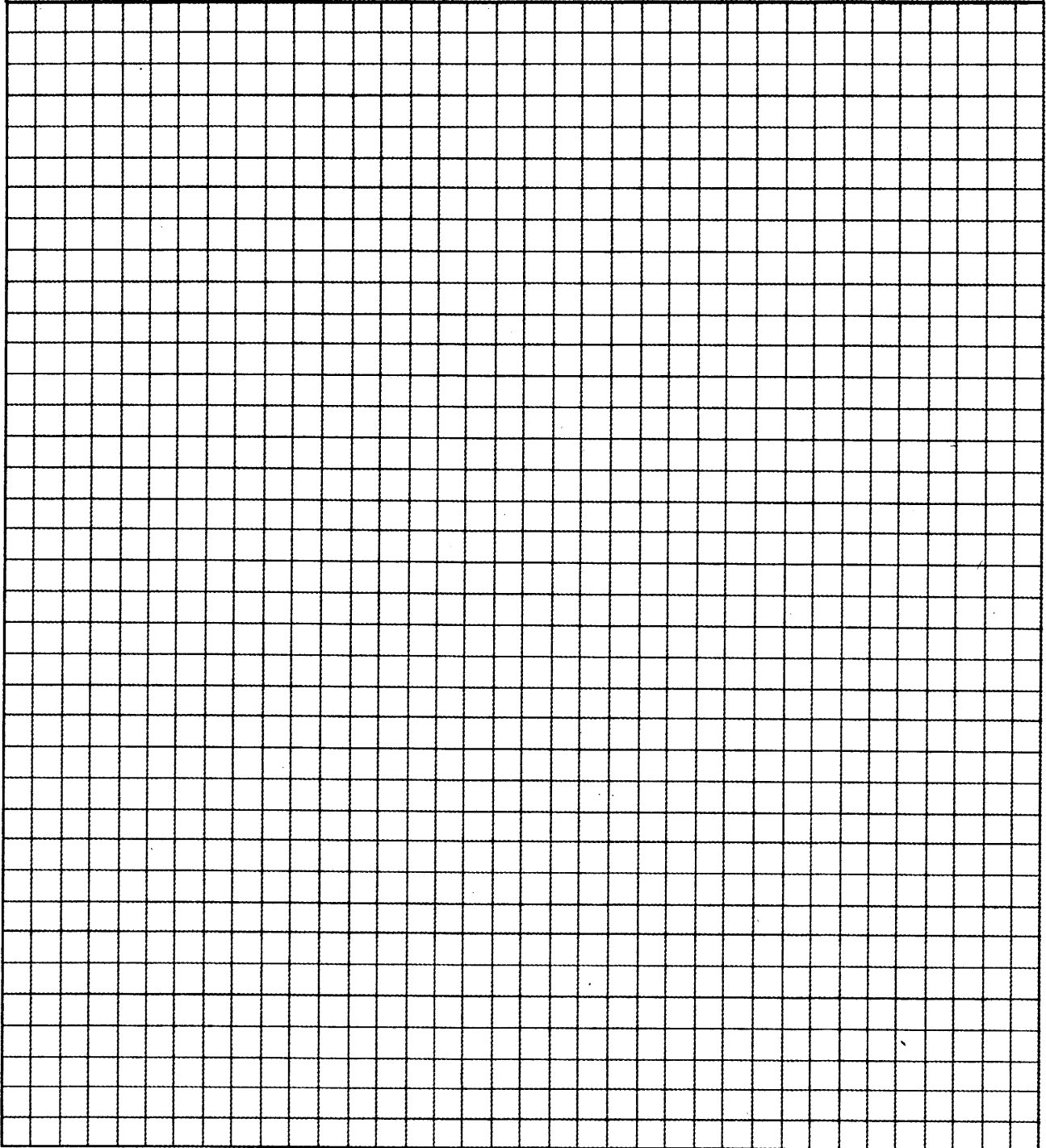
Название предмета

Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ!

Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета



При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

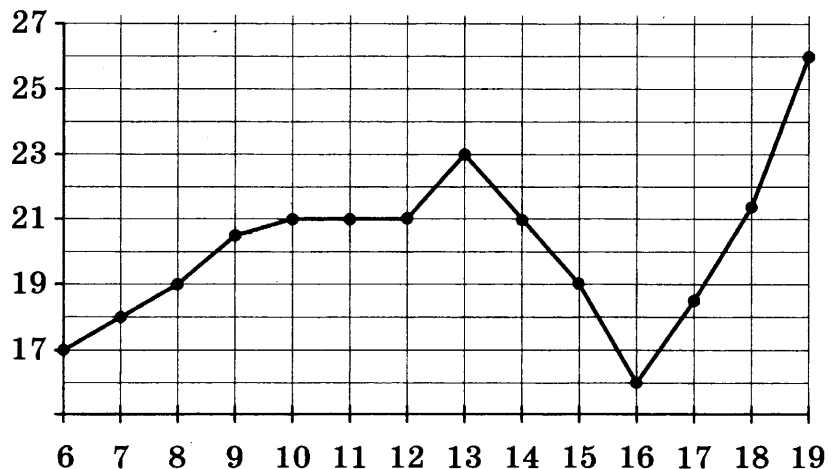
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ВАРИАНТ 1

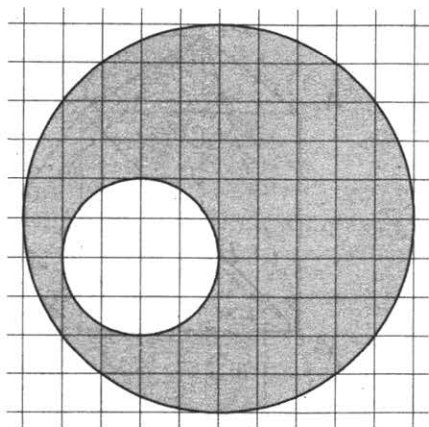
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?
2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.


 3

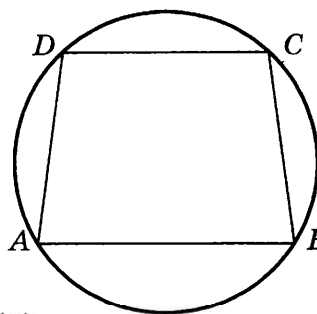
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

 4

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

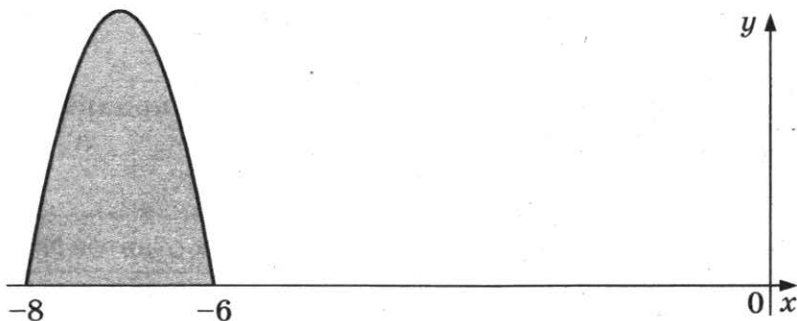
 5

6. Основания равнобедренной трапеции равны 120 и 50. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 65. Найдите высоту трапеции.

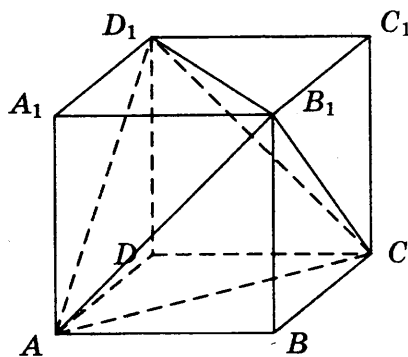

 6

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -x^3 - 21x^2 - 144x - \frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

 7


8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 27. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{44^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 20^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 68^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 136 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 240 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 30x + 248}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

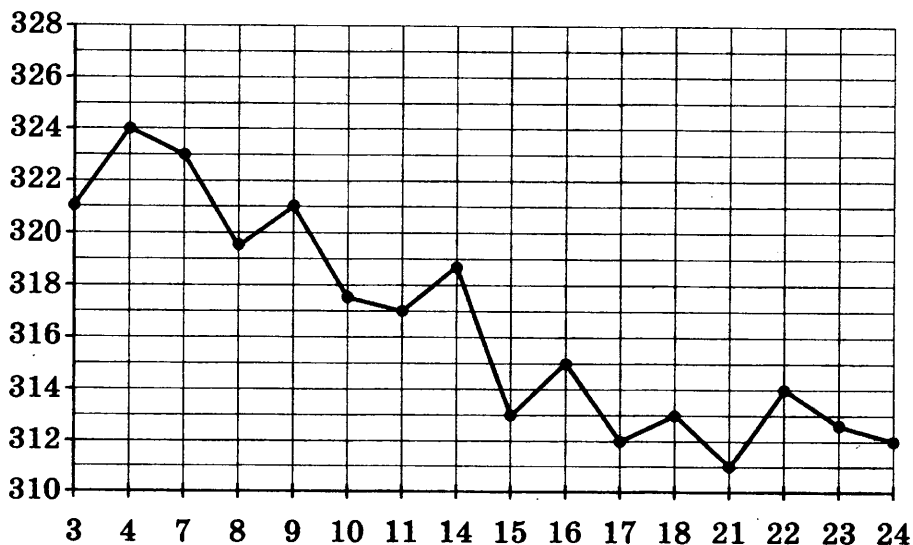
13. а) Решите уравнение $49^{\cos^2 x} = 7^{\sqrt{2}\cos^2 x}$.
 б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.
14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
 а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
 б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 14$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.
15. Решите неравенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$.
16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .
 а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,8$ и сторона $AC = 30$.
17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 230 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.
 Фермер может продавать картофель по цене 1800 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1600 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$\log_{6,5-a}(x^2+3) = \log_{6,5-a}((a-8)x-3)$$
- имеет ровно два различных корня.
19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.
 а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.
 б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?
 в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?

ВАРИАНТ 2

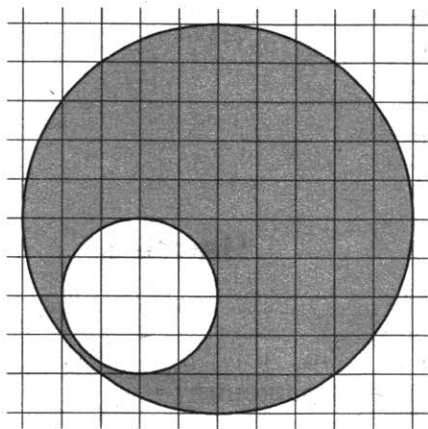
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 900 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?
2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



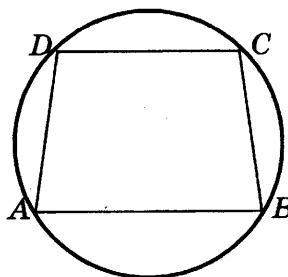
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

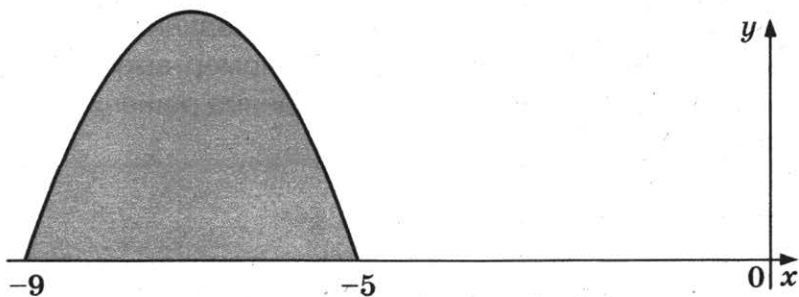
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 96 и 28. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 50. Найдите высоту трапеции.

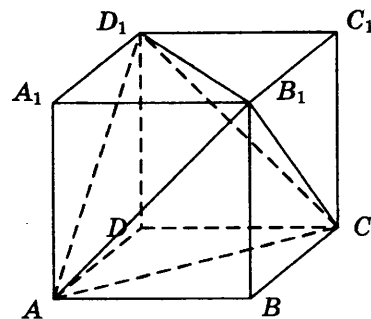


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{135}{4}x - \frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^9}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 15^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 1,4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 75^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды,

$\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 168 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 600 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $(64^{\sin x})^{\cos x} = 8^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 16$ и $AA_1 = 5$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2} > \sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и сторона $AC = 36$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-7,5}(x^2+2) = \log_{a-7,5}((a-6)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?

ВАРИАНТ 3

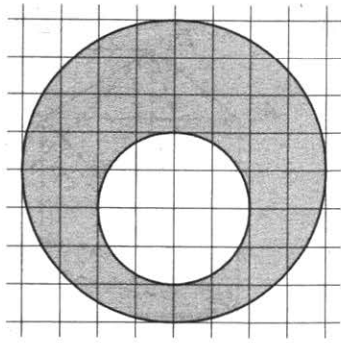
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1100 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет лилий для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество лилий сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, лилии стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?
2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.


 3

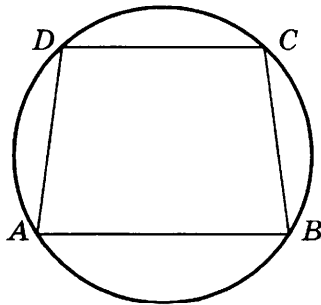
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

 4

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

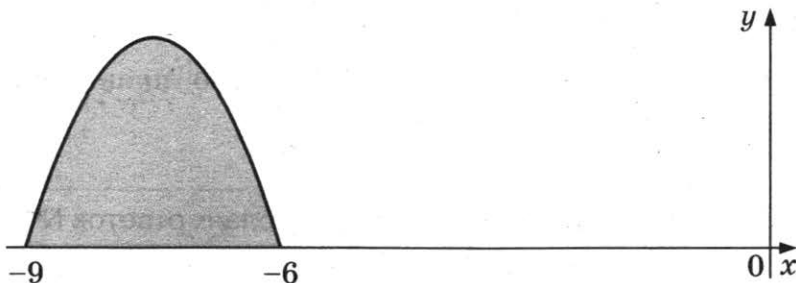
 5

6. Основания равнобедренной трапеции равны 72 и 30. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 39. Найдите высоту трапеции.

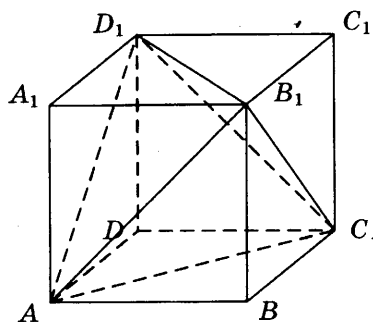
 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{10}{27}x^3 - \frac{25}{3}x^2 - 60x - \frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

 7


8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{28^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 25^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 49^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,1$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 66 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 18x + 100}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{\cos x} = 6^{\sqrt{3}\cos x}$.

	13

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

	14
--	-----------

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 12$ и $AA_1 = 7$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-1} > \sqrt{x-1}$.

	15
--	-----------

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

	16
--	-----------

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и сторона $AC = 18$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 180 ц/га.

	17
--	-----------

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

	18
--	-----------

$$\log_{2,5-a}(x^2+1) = \log_{2,5-a}((a-4)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

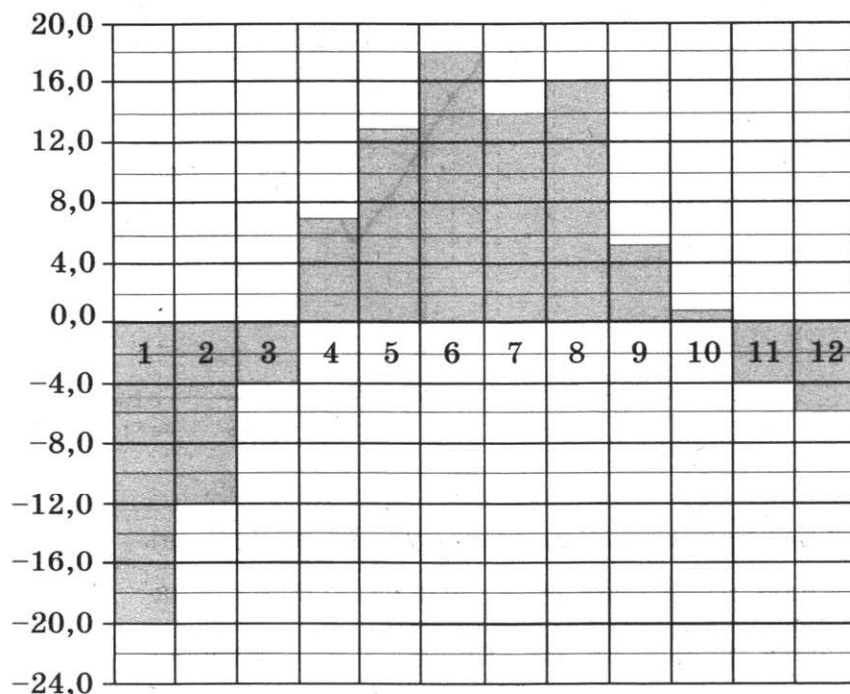
19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.
- б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?
- в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?

ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

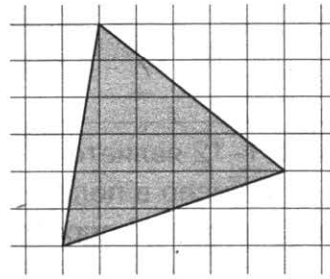
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 21 дюйму. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



4

4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

5

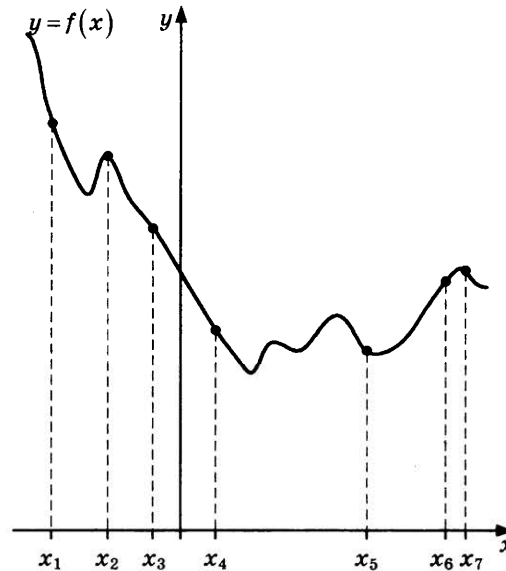
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4^{2x}$.

6

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 9$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC .

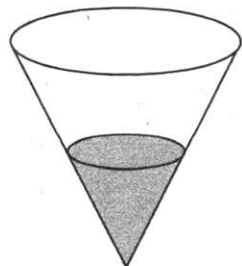
7

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8

8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(252^2 - 23^2) : 275$.
10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 10 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?
11. Если смешать 45-процентный раствор кислоты и 97-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?
12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 144}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.
14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.
а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt{16 \frac{2x+1}{x}}$.

16

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

17

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

19

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?

ВАРИАНТ 5

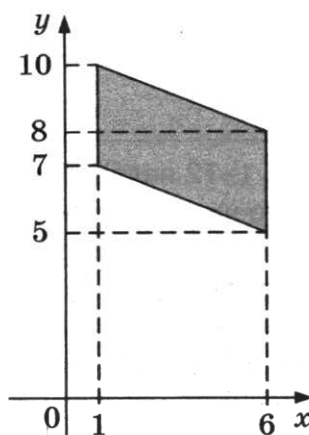
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 16 095 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была больше 43 долларов США за баррель.

 1 2

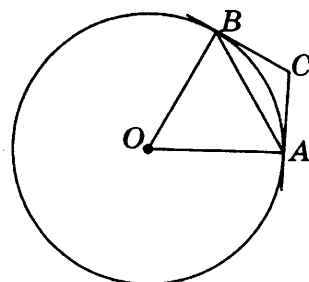
3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(1; 7)$, $(6; 5)$, $(6; 8)$, $(1; 10)$.



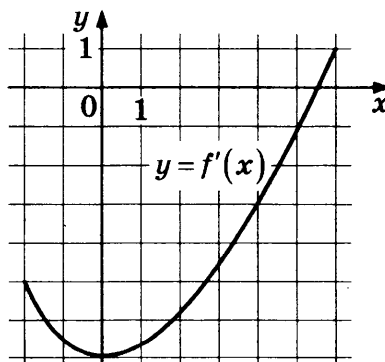
4. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна $0,15$. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна $0,3$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Найдите корень уравнения $(x - 5)^3 = -729$.

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 63° . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 1$ или совпадает с ней.



8. Высота конуса равна 64 , а длина образующей равна 80 . Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3,5} \cdot \sqrt{1,5}}{\sqrt{0,21}}$.
10. Два тела массой $m = 10$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 90 джоулей. Ответ дайте в градусах.
11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 320 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
12. Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 20x + 48 \ln x + 4$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $9^{x+1} - 64 \cdot 3^x + 7 = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2,5; 1,5]$.
14. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 3$ и $HC = 5$.
15. Решите неравенство

$$2\log_4(x-1)^2 + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+12) \leq 2\log_2(3-x) - \log_{\frac{1}{2}}(x+7).$$

16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 150^\circ$, $BC = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

17. В июле Виктор планирует взять в кредит 2,5 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года Виктор должен выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество лет Виктор может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 760 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 + ax - 3}{x^2 + 2x + 5}$ содержится в интервале $(-2; 2)$.

19. Известно, что a , b , c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{5}{9}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 17 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

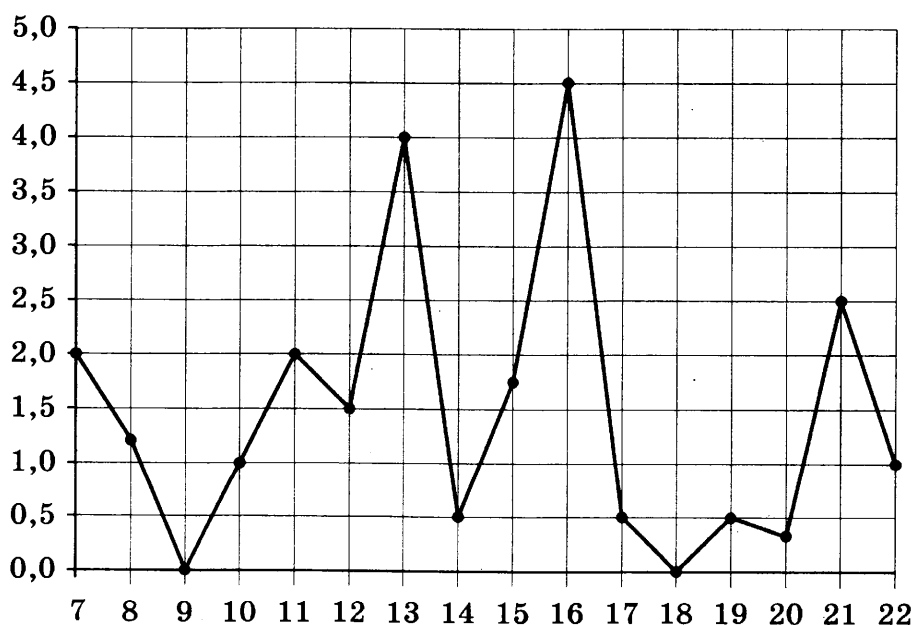
в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 9d$?

ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

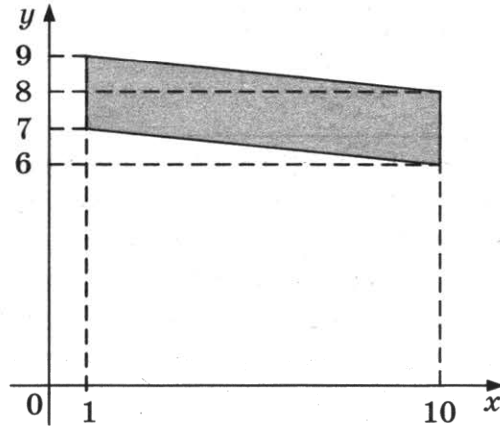
Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 10 005 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Мурманске с 7 по 22 ноября 1995 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпало больше 3 миллиметров осадков.



3

3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 7), (10; 6), (10; 8), (1; 9).



4

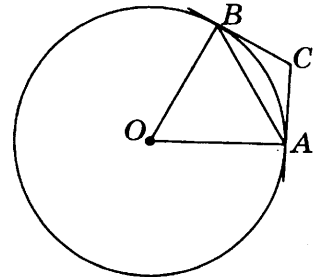
4. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5

5. Найдите корень уравнения $(x + 4)^3 = -125$.

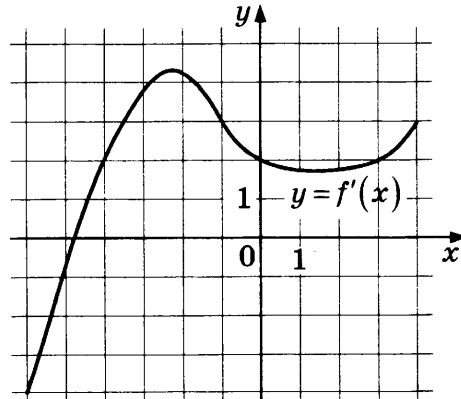
6

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 31° . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



7

7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 8 - x$ или совпадает с ней.



8

8. Высота конуса равна 96, а длина образующей равна 100. Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{4,2} \cdot \sqrt{1,8}}{\sqrt{0,21}}$.
10. Два тела массой $m = 2$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 50 джоулей. Ответ дайте в градусах.
11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 560 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
12. Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 30x + 112 \ln x - 1$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5 \cdot 25^x - 51 \cdot 5^x + 10 = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[0,5; 1,5]$.
14. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 2$ и $HC = 4$.
15. Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} x^2 - \log_{\frac{1}{7}} (x+2) \leq 2 \log_7 (1-x) + 2 \log_{49} (x+10).$$

16

16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 120^\circ$, $BC = 9$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

17

17. В июле Аркадий планирует взять в кредит 2,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года Аркадий должен выплатить некоторую часть долга.
- На какое минимальное количество лет Аркадий может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 980 тысяч рублей?

18

18. Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 - 2ax - 1}{x^2 + 4x + 6}$ содержится в интервале $(-1; 2)$.

19

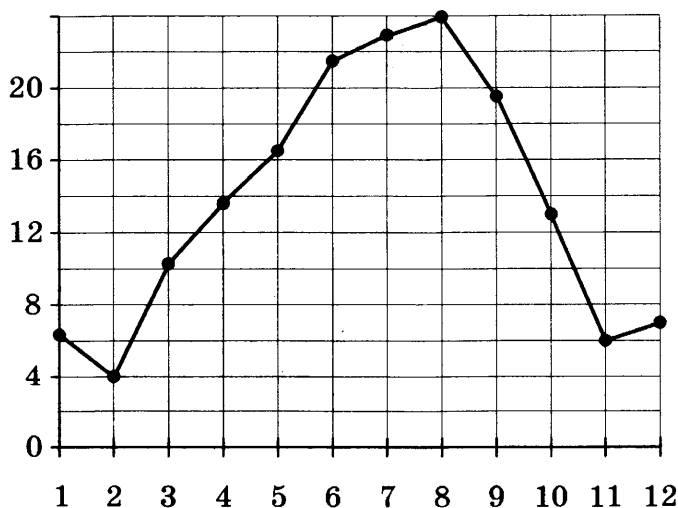
19. Известно, что a , b , c и d — попарно различные положительные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{7}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 16 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 7d$?

ВАРИАНТ 7

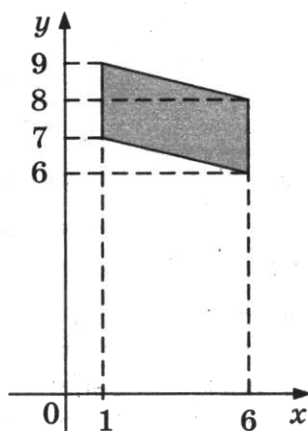
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 11 745 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько месяцев из данного периода среднемесячная температура была больше 18 градусов Цельсия.

 1 2

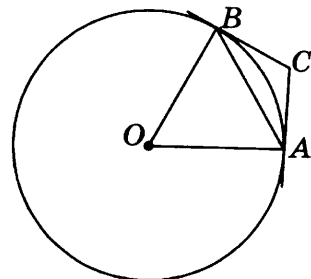
3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(1; 7)$, $(6; 6)$, $(6; 8)$, $(1; 9)$.



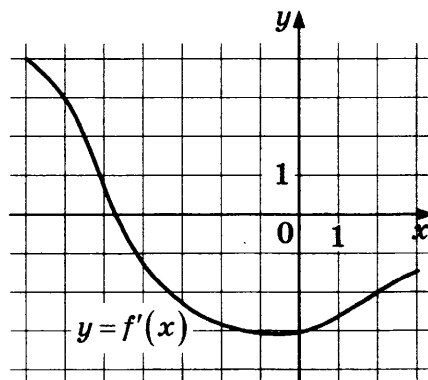
4. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна $0,35$. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна $0,2$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Найдите корень уравнения $(x - 7)^3 = -1$.

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 34° . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 1$ или совпадает с ней.



8. Высота конуса равна 42 , а длина образующей равна 58 . Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{1,2}}{\sqrt{0,18}}$.
10. Два тела массой $m = 4$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 16 джоулей. Ответ дайте в градусах.
11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 352 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 44 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
12. Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 34x + 144 \ln x + 6$.

 9 10 11 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6 \cdot 4^x - 49 \cdot 2^x + 8 = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-4,5; -2,5]$.
14. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 1$ и $HC = 9$.
15. Решите неравенство

 13 14 15

$$-\log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2 \log_9 (x+3) \geq 2 \log_3 (-x-1) + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} (x+6).$$

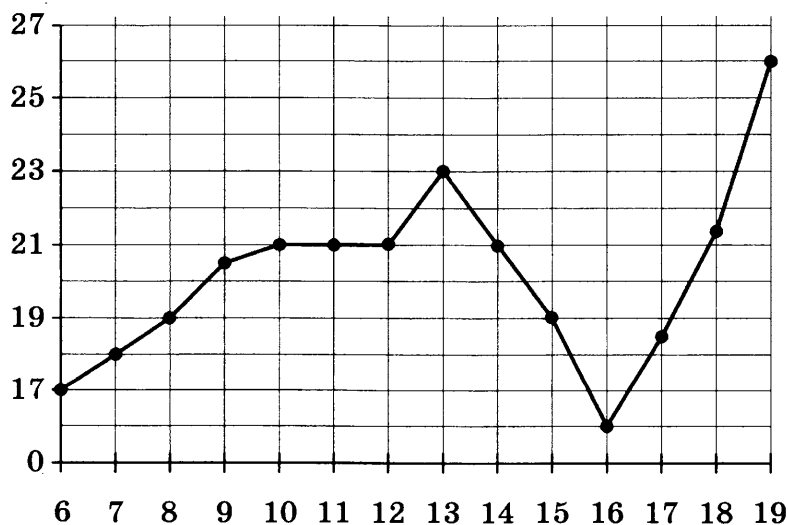
16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 120^\circ$, $BC = 5\sqrt{3}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .
17. В июле Виктор планирует взять в кредит 2,4 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года Виктор должен выплатить некоторую часть долга.
- На какое минимальное количество лет Виктор может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 950 тысяч рублей?
18. Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 - 4x + 6}$ содержится в интервале $(-2; 2)$.
19. Известно, что a , b , c и d — попарно различные положительные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{15}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 15 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 6d$?

ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

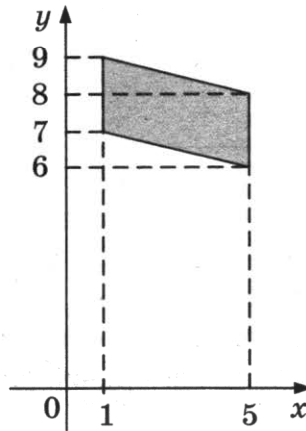
Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 6960 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода среднесуточная температура была больше 20 градусов Цельсия.

 1 2

3

3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(1; 7)$, $(5; 6)$, $(5; 8)$, $(1; 9)$.

**4**

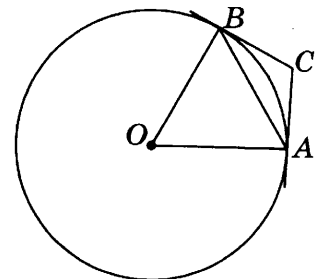
4. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна $0,25$. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна $0,1$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5

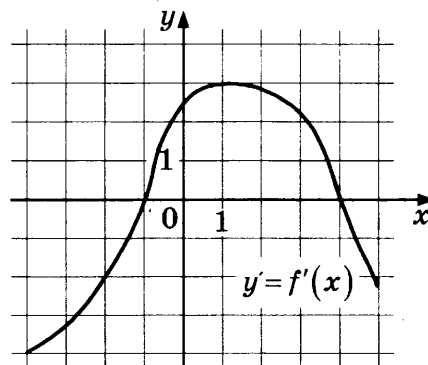
5. Найдите корень уравнения $(x - 10)^9 = -512$.

6

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC . Угол CAB равен 39° . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.

**7**

7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 6$ или совпадает с ней.

**8**

8. Высота конуса равна 40 , а длина образующей равна 58 . Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,6}}{\sqrt{0,16}}$.
10. Два тела массой $m = 2$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 32 джоулей. Ответ дайте в градусах.
11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
12. Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 28x + 90 \ln x - 8$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4^{x+1} - 21 \cdot 2^x + 5 = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2,5; 2,5]$.
14. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 1$ и $HC = 3$.
15. Решите неравенство

$$2 \log_4 x^2 + \log_2 (x+14) \leq -\log_{\frac{1}{2}} (x+4) + 2 \log_2 (x+2).$$

16

16. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите радиус данной окружности, если $\angle A = 135^\circ$, $BC = 3\sqrt{6}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

17

17. В июле Павел планирует взять в кредит 1,5 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года Павел должен выплатить некоторую часть долга.
- На какое минимальное количество лет Павел может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 450 тысяч рублей?

18

18. Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 + ax - 1}{x^2 - 4x + 5}$ содержится в интервале $(-1; 2)$.

19

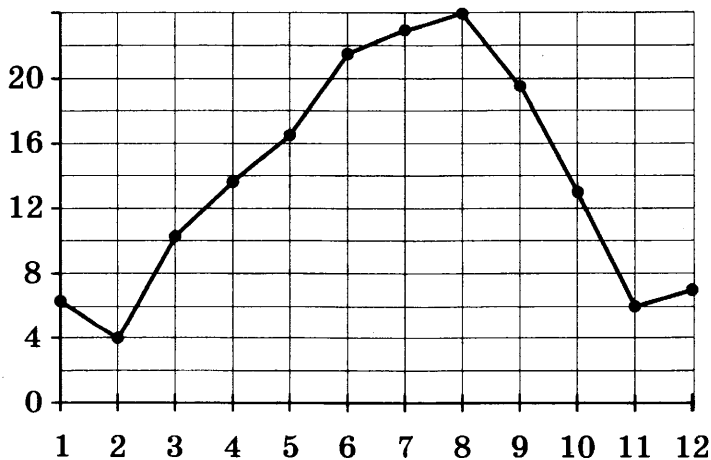
19. Известно, что a , b , c и d — попарно различные положительные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6}{17}$?
- б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 14 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 6d$?

ВАРИАНТ 9

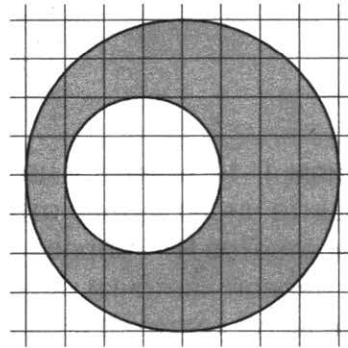
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?
2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



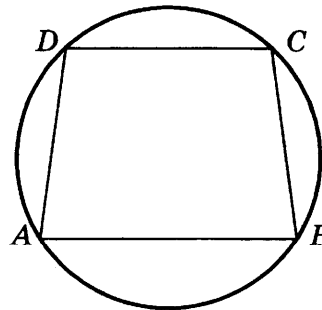
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 5. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



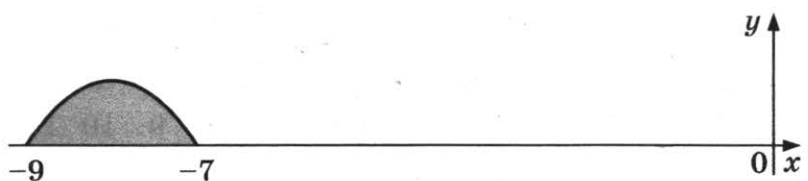
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

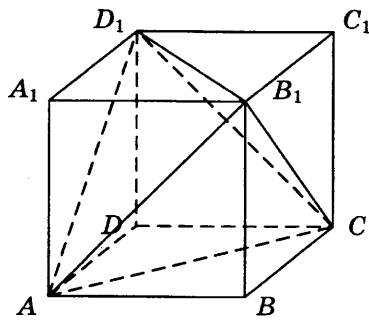
6. Основания равнобедренной трапеции равны 48 и 20. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 26. Найдите высоту трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 6x^2 - \frac{189}{4}x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 6. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 C B_1$.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(5^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{45^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 25^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3 \text{ кг/с}$. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 57^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды,

$$\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}} \text{ — коэффициент теплообмена, а } \alpha = 1,4 \text{ — постоянная.}$$

Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $(81^{\sin x})^{\cos x} = 9^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$.

15

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-2}$.

16

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.

17

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+2,5}(x^2 + 3) = \log_{a+2,5}((a+4)x + 4)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

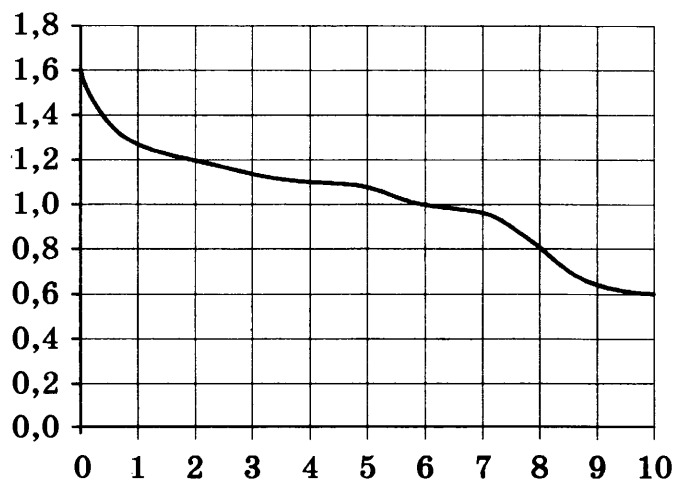
Часть 1

1

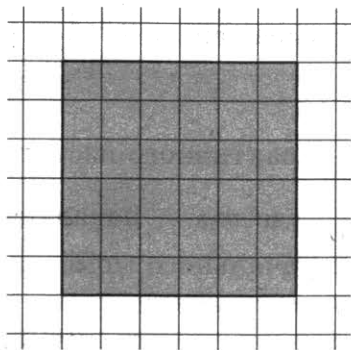
1. Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 500 рублей в воскресенье?

2

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадет с 1,2 вольт до 1 вольта.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



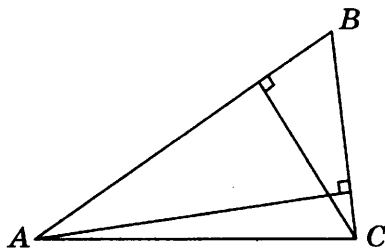
4. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов — первые два дня по 32 доклада, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?



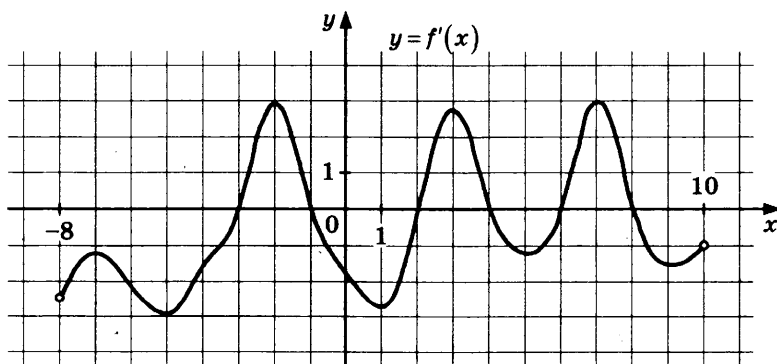
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{7x+41}{17}} = 3$.



6. В треугольнике со сторонами 10 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 3. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 10)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 7]$.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 32. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 121}{\log_6 11}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 80 мг. Период его полураспада составляет 15 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 15 минут, второй и третий — за 21 минуту, а первый и третий — за 35 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (4 - 5x)\cos x + 5\sin x + 17$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 7$ и диагональю $BD = 10$. Все боковые рёбра пирамиды равны 7. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

15. Решите неравенство $7^{x+2} - 7^{x+1} - 2 \cdot 7^x > 2^{\frac{x+1}{3}} + 2^{\frac{x-1}{3}}$.

 15

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD , равный стороне AB . Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

 16

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 200 и известно отношение $AC : AB = 2 : 3$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

 17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить банку 1 024 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

 18

$$ax^2 + 2(a-1)x + (a-4) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 12 раз меньше произведения двух других его цифр?

 19

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 9?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

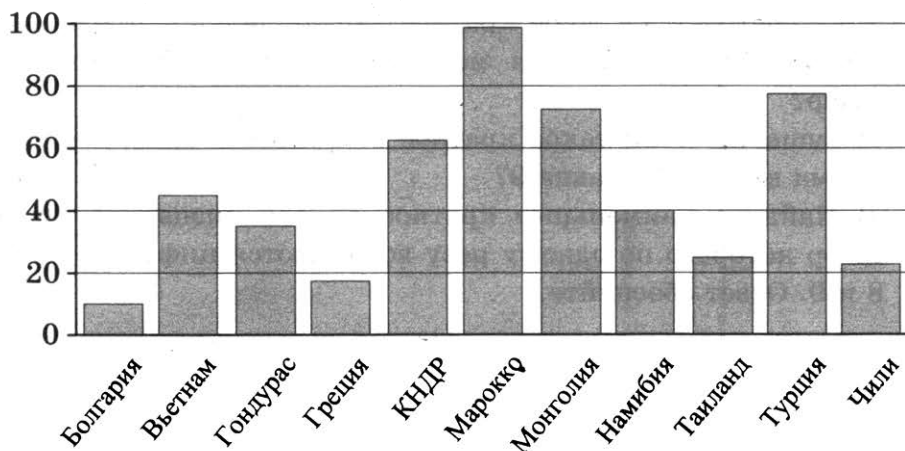
ВАРИАНТ 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

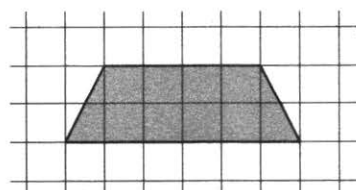
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 января составляли 14 836 кВт · ч, а 1 февраля — 15 036 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за январь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 4 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Греция?



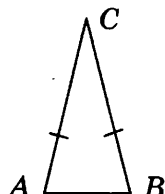
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



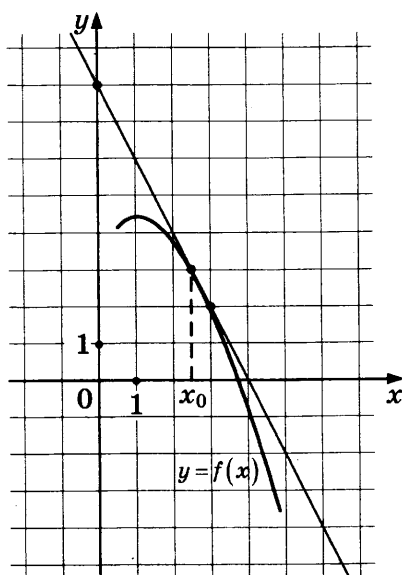
4. Семнадцать детей встают в хорювод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Таня. Какова вероятность того, что Серёжа и Таня окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(12 + x) = \log_2 11$.

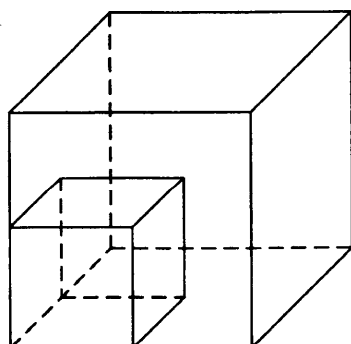
6. В треугольнике ABC угол C равен 26° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 17 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $13\sqrt{3}\operatorname{tg}(-930^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 180 - 10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 450 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (18 - x)e^{18 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{9}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{16} = 3 \cdot \left(\frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{4} \right) - \frac{1}{2}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[0; 2]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 5$, а $C_1 L = 3$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15. Решите неравенство $\log_{\frac{9}{16}} \left(\log_{\frac{1}{4}} (x+2) \right) \geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .

б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 16$ и $AC = 10$.

17. 31 декабря 2016 года Алексей взял в банке 2 184 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Алексей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x + y + z = 2x^2 + 3y^2 \\ -x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 24, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

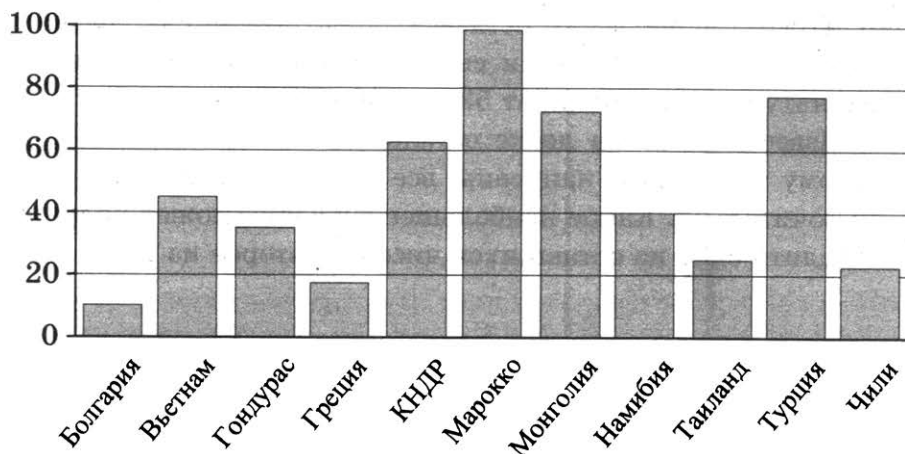
ВАРИАНТ 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

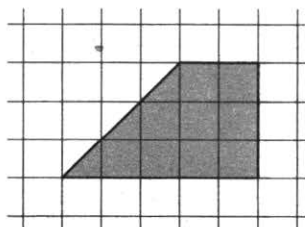
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 июля составляли 88 219 кВт · ч, а 1 августа — 88 369 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за июль, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Монголия?



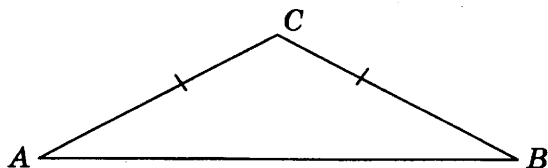
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



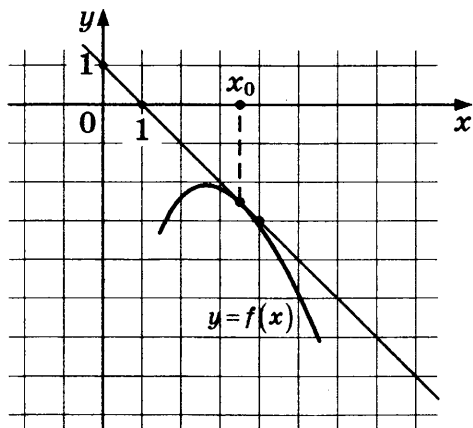
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Максим и его сестра Вика. Какова вероятность того, что Максим и Вика не окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(16 + x) = \log_2 3$.

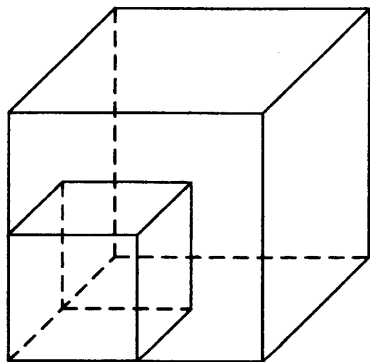
6. В треугольнике ABC угол C равен 146° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 15 раз?



Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $-29\sqrt{3}\operatorname{tg}(-60^\circ)$.

10

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 95 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 440 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11

11. Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = (14 - x)e^{14-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{25}{(x-2)^2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{5}{x-2} + 16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[3; 8]$.

14

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{36}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right) \geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .
- а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .
- б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 24$ и $AC = 12,5$.

	16
--	----

17. 31 декабря 2016 года Сергей взял в банке 2 648 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

	17
--	----

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = x^2 + 2y^2 \\ -2x + y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

	18
--	----

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.
- а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 20, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13?
- б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно?
- в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

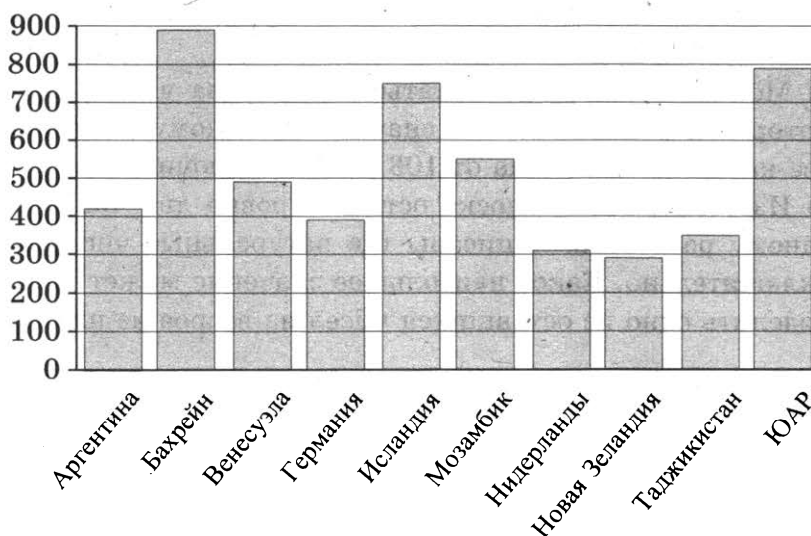
	19
--	----

ВАРИАНТ 13

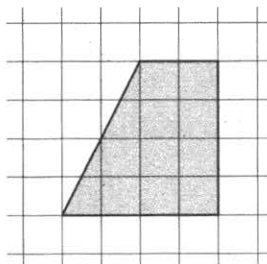
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 сентября составляли 54 209 кВт · ч, а 1 октября — 54 399 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за сентябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 10 копеек? Ответ дайте в рублях.
2. На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место занимала Германия?



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



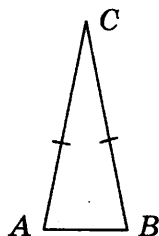
4. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Дима и его сестра Катя. Какова вероятность того, что Дима и Катя не окажутся рядом?

 4

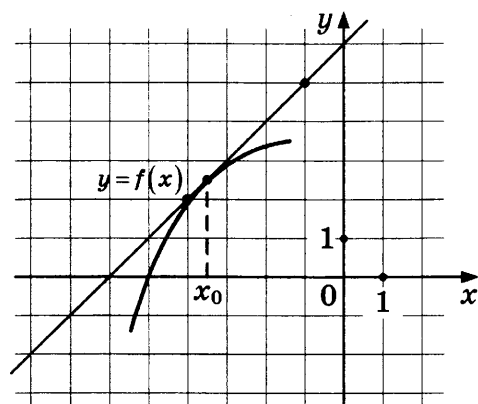
5. Найдите корень уравнения $\log_5(1+x) = \log_5 4$.

 5

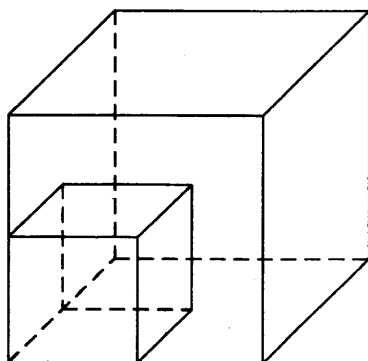
6. В треугольнике ABC угол C равен 20° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

 6


7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 7


8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 11 раз?

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\operatorname{tg}(1050^\circ)$.

10

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11

11. Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = (16 - x)e^{16 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

14

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{8}} \left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1) \right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .
- а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .
- б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 15$ и $AC = 8,5$.



17. 31 декабря 2016 года Александр взял в банке 3 276 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Александр переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Александр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?



18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z = x^2 + 3y^2 \\ x - 3y - 4z = a \end{cases}$$



имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.
- а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?
- б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?
- в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

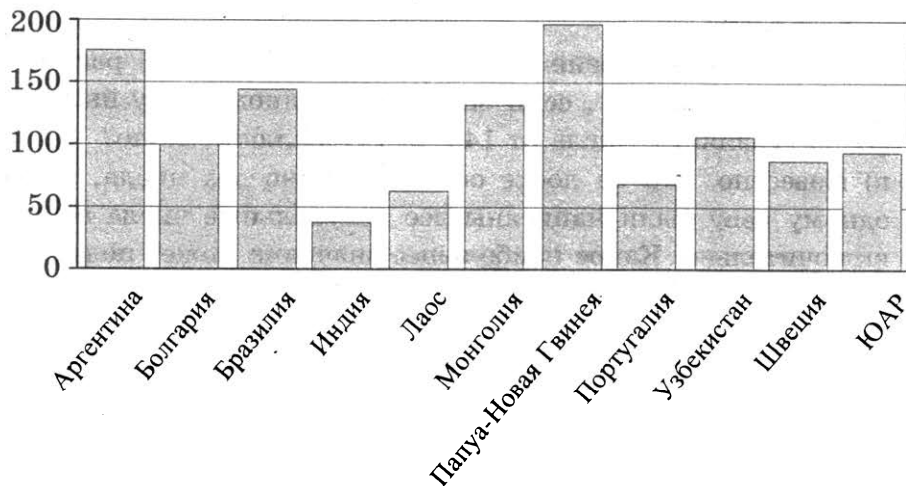


ВАРИАНТ 14

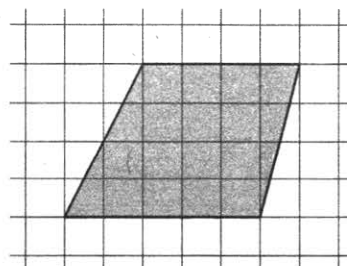
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 марта составляли 46 987 кВт · ч, а 1 апреля — 47 157 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за март, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 2 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Аргентина?



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



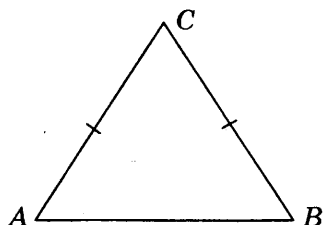
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Антон и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Антон и Маша окажутся рядом?

 4

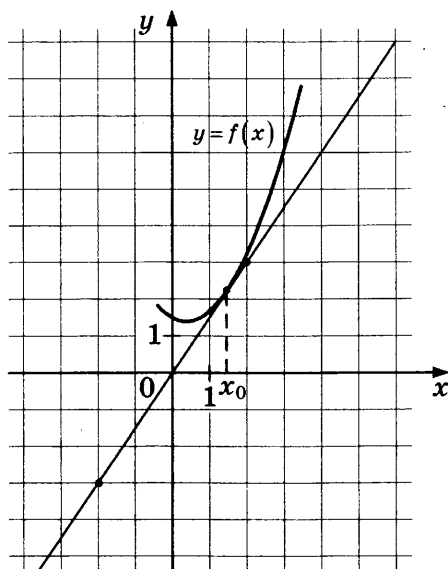
5. Найдите корень уравнения $\log_7(9 + x) = \log_7 2$.

 5

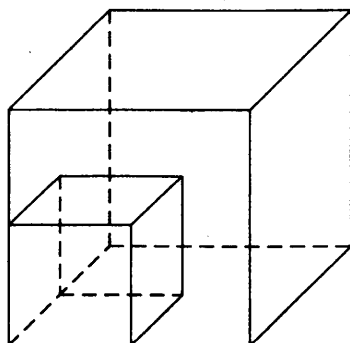
6. В треугольнике ABC угол C равен 66° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

 6

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 7

8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 7 раз?

 8

Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\operatorname{tg}(-600^\circ)$.

10

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11

11. Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)e^{25 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

14

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{4}}\left(\log_{\frac{1}{5}}(x+3)\right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .

б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 12$ и $AC = 7,5$.

16

17. 31 декабря 2016 года Виктор взял в банке 3 972 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Виктор выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

17

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2x^2 + y^2 \\ -x + y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

19

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	10	63	0,078	5	85	4	9	121	32	40	-15

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$
14	$\arcsin \frac{4\sqrt{11}}{7\sqrt{13}}$
15	$3 \leq x < \frac{\sqrt{89} - 2}{2}$
16	4
17	17,88 млн рублей
18	$a < 5,5; 5,5 < a < 6$
19	а) например, подходит последовательность 11, 7, 4, 2, 1; б) нет; в) при $n = 34$

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	13	84	0,0294	1	62	8	4	9	45	60	11

13	а) $\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-2\pi; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{34}}$
15	$2 \leq x < \frac{2\sqrt{31} - 5}{3}$
16	$3\sqrt{7}$
17	9 млн рублей
18	$8 < a < 8,5; 8,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 7, 6, 4, 1; б) нет; в) при $n = 24$

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	7	12	0,0476	4	51	5	7	49	37	50	9

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{65}}$
15	$1 \leq x < \frac{2\sqrt{13} - 4}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
17	15,6 млн рублей
18	$a < 1,5; 1,5 < a < 2$
19	а) например, подходит последовательность 8, 5, 3, 2, 2; б) нет; в) при $n = 28$

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
53	-6	17	0,5	-3	6	6	378	229	14	15	-12

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{21\pi}{4}; -\frac{9\pi}{2}$
14	б) $\arccos \frac{1}{3}$
15	$x < -\frac{1}{4}, 0 < x < 2$
16	$2\sqrt{42}$
17	115
18	$a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$
19	а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18 500	5	15	0,45	-4	126	4	96	5	60	18	4

13	а) -2; $\log_3 7$; б) -2
14	б) $\frac{17\sqrt{34}}{9}$
15	$-3 \leq x < 1, 1 < x \leq \frac{17}{9}$
16	б) $3\sqrt{5+2\sqrt{3}}$
17	6
18	$4 - 2\sqrt{13} < a < -4 + 2\sqrt{21}$
19	а) Да, например, если $a = 19, b = 37, c = 31$ и $d = 53$; б) нет; в) $\frac{94}{17}$

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11 500	2	18	0,5	-9	62	-5	56	6	60	24	7

13	а) -1; $\log_5 10$; б) $\log_5 10$
14	б) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$
15	$-2 < x < 0, 0 < x \leq \frac{2}{3}$
16	б) $\frac{3\sqrt{21}}{2}$
17	3
18	$2 - \sqrt{10} < a < -4 + \sqrt{13}$
19	а) Да, например, если $a = 20, b = 21, c = 22$ и $d = 28$; б) нет; в) 4

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13 500	4	10	0,55	6	68	-6	80	2	60	19	8

13	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 3; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{25\pi}{6}$
14	б) $\frac{41\sqrt{410}}{3}$
15	$-2 \leq x < -1$
16	б) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$
17	4
18	$8 - 2\sqrt{11} < a < -8 + 2\sqrt{39}$
19	а) Да, например, если $a = 13, b = 19, c = 15$ и $d = 41$; б) нет; в) $\frac{109}{22}$

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8000	8	8	0,35	8	78	1	84	3	60	16	5

13	а) -2 ; $\log_2 5$; б) -2 ; $\log_2 5$
14	б) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
15	$-\frac{2}{3} \leq x < 0, 0 < x \leq 4$
16	б) $3\sqrt{15+6\sqrt{2}}$
17	5
18	$4 - 4\sqrt{2} < a < -8 + 2\sqrt{11}$
19	а) Да, например, если $a = 13, b = 40, c = 17$ и $d = 45$; б) нет; в) $\frac{157}{29}$

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	20	15	0,039	-5	34	1	2	81	33	80	3

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{73}}$
15	$2 \leq x < \frac{\sqrt{17}}{2}$
16	$3\sqrt{11}$
17	14,4 млн рублей
18	$-2 < a < -1,5; -1,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 5, 6, 6, 5, 3; б) нет; в) при $n = 20$

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	4	3	0,1	16	15	2	48	2	45	14	0,8

13	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{16\pi}{3}$; $-\frac{14\pi}{3}$; $-4\pi - \arccos \frac{2}{3}$
14	б) $\frac{7\sqrt{6}}{5}$
15	$x > -\frac{\lg 16}{\lg 7 - \lg \sqrt[3]{2}}$. Замечание. Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	420
17	1 600 000 рублей
18	$\frac{4 - 2\sqrt{13}}{9} < a < 0; 0 < a < \frac{2\sqrt{13} + 4}{9}$
19	а) да, например, 869; б) нет; в) 12 375 869

Вариант 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
900	10	5	0,125	-1	77	-2	289	-13	15	26	19

13	а) -7 ; 1 ; $-5 \pm 2\sqrt{7}$; б) $-5 + 2\sqrt{7}$; 1
14	б) $\frac{208}{3}$
15	$-2 < x \leq -\frac{31}{16}$
16	12
17	1 036 800 рублей
18	$a = -\frac{25}{36}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{155}{53}$

Вариант 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
525	3	3,5	0,8	-13	17	-1	225	87	11	47	15

13	а) -3 ; 4 ; $4 \pm \sqrt{14}$; б) 4 ; $4 + \sqrt{14}$
14	б) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$
15	$-1 < x \leq -\frac{63}{64}$
16	7
17	1 064 800 рублей
18	$a = -\frac{107}{16}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{205}{103}$

Вариант 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
209	7	3	0,75	3	80	1	121	17	9	44	17

13	а) $-1; 5; 7 \pm 2\sqrt{11}$; б) $-1; 7 - 2\sqrt{11}$
14	б) $\frac{55\sqrt{2}}{2}$
15	$-1 < x \leq -\frac{48}{49}$
16	8
17	1 555 200 рублей
18	$a = 3,5$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{191}{141}$

Вариант 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
425	2	4,5	0,2	-7	57	1,5	49	96	12	24	26

13	а) $-5; 2; \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$; б) $-5; -\frac{1 + \sqrt{65}}{2}$
14	б) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
15	$-3 < x \leq -\frac{74}{25}$
16	9
17	1 597 200 рублей
18	$a = -\frac{33}{4}$
19	а) может; б) не может; в) 1,5

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 4

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдем к системе

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + 1) = \cos^2 x; \\ \cos x \leq 0, \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$(2-\sqrt{2})(\sin x + 1) = 2\cos^2 x; \quad (2-\sqrt{2})\sin x + 2 - \sqrt{2} = 2 - 2\sin^2 x;$$

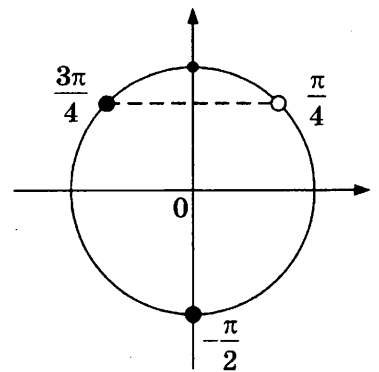
$$2\sin^2 x + (2-2\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0; \quad \sin x = -1 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

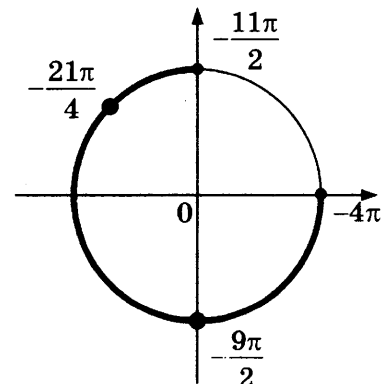
С помощью тригонометрической окружности отберём серии, удовлетворяющие условию $\cos x \leq 0$. Получим:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$. Получим $x = -\frac{21\pi}{4}$,

$$x = -\frac{9\pi}{2}.$$

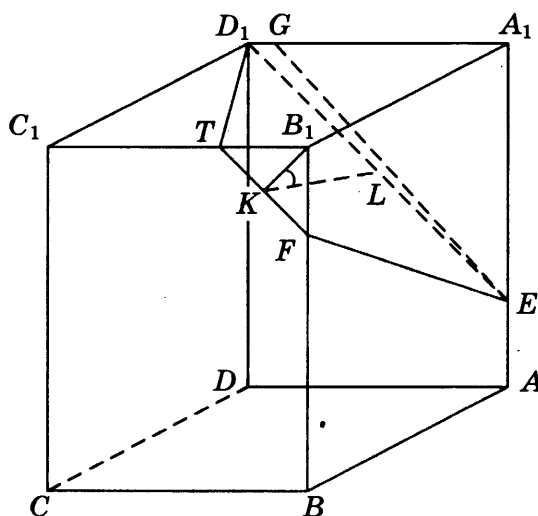


Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{21\pi}{4}; \quad -\frac{9\pi}{2}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.
- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

Решение.



- а) В плоскости $AA_1 D_1$ проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро $A_1 D_1$ или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1 T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1 G = 3$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .
- б) В плоскости $BB_1 C_1$ из точки B_1 опустим перпендикуляр $B_1 K$ на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1 K L$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$ или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника $FB_1 T$ находим $B_1 K = \frac{FB_1 \cdot B_1 T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{20 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и A_1D_1 параллелепипеда на $\frac{3}{2}$. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ и 4.

Отсюда $B_1L = \sqrt{\frac{41}{2}}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Верно доказан пункт a . ИЛИ Верно решён пункт b при отсутствии обоснований в пункте a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{4x-3} < 2^{\frac{4x+2}{x}}; \quad 4x-3 < \frac{4x+2}{x}; \quad \frac{4x^2-3x}{x} < \frac{4x+2}{x}; \quad \frac{4x^2-7x-2}{x} < 0; \quad \frac{(4x+1)(x-2)}{x} > 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем решение: $x < -\frac{1}{4}$ или $0 < x < 2$.

Ответ: $x < -\frac{1}{4}$, $0 < x < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

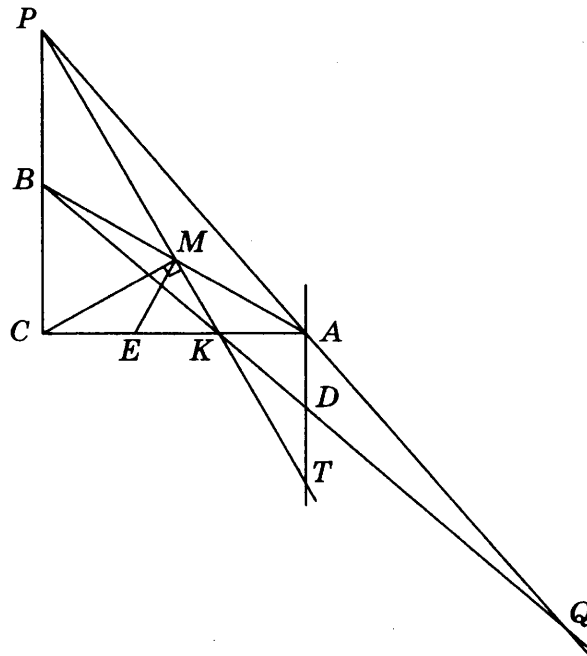
16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.
- а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
- б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

Решение.

а) Пусть E — середина KC . Тогда ME — медиана прямоугольного треугольника CMK , проведённая из вершины прямого угла. Значит,

$$ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE.$$

Следовательно, $\angle A = 30^\circ$.



б) Из прямоугольных треугольников ABC и KBC находим, что

$$AC = BC \operatorname{ctg} 30^\circ = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6},$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{18 + 24} = \sqrt{42}.$$

Через вершину A проведём прямую, параллельную BC . Пусть T — точка пересечения этой прямой с прямой MK , D и Q — точки пересечения прямой BK с прямыми AT и AP соответственно.

Из равенства треугольников AMT и BMP получаем, что $AT = BP$, а из подобия треугольников $СКР$ и AKT следует $CP = 2AT = 2BP$. Значит, B — середина CP .

Треугольник AKD подобен треугольнику $СКВ$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому

$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP$, а так как AD параллельна BP , AD — средняя линия треугольника BQP . Значит,

$$BQ = 2DB = 2 \cdot \frac{3}{2}BK = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{42} = 3\sqrt{42}.$$

Следовательно,

$$KQ = BQ - BK = 3\sqrt{42} - \sqrt{42} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{4S}{5}, \frac{3S}{5}, \frac{2S}{5}, \frac{S}{5}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,05S, 1,05 \cdot \frac{4S}{5}, 1,05 \cdot \frac{3S}{5}, 1,05 \cdot \frac{2S}{5}, 1,05 \cdot \frac{S}{5}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0,05S + \frac{S}{5}, \frac{4 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{3 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{2 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{0,05S + S}{5}.$$

Всего следует выплатить

$$S + S \cdot 0,05 \left(1 + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1}{5} \right) = S \left(1 + \frac{6 \cdot 0,05}{2} \right) = 1,15S.$$

Значит, банку нужно вернуть 115% от суммы кредита.

Ответ: 115.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Сделаем замену $y = x^2 + x + 1$. Получим уравнение на y :

$$(y + 2a^2)^2 = 8a^2y;$$

$$y^2 + 4a^2y + 4a^4 - 8a^2y = 0;$$

$$(y - 2a^2)^2 = 0; y = 2a^2.$$

Вернёмся к переменной x : $x^2 + x + 1 - 2a^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант равен 0:

$$1 - 4(1 - 2a^2) = 0; 8a^2 - 3 = 0; a = \pm \sqrt{\frac{3}{8}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $a = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 1, 126, 151, 156, 157.

б) При всех натуральных $k \leq n - 1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$ равносильно равенству $5b_{k+1} = b_k$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n - 1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

Имеем $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} < a_1 + \frac{b_1}{1-q} = a_1 + \frac{5}{4}b_1 = \frac{5}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_1$. Значит, равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$ ни при каком $n \geq 3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n - 1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Имеем

$286 = a_n = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} = a_1 + \frac{b_1(5^{n-1}-1)}{2 \cdot 5^{n-2}}$. Следовательно, b_1 делится на 5^{n-2} , а a_1 даёт при

делении на $\frac{5^{n-1}-1}{2}$ тот же остаток, что и число 286. Так как $5^4 = 625 > 286 > b_1 \geq 5^{n-2}$, по-

лучаем, что $n \leq 5$. Остатки при делении числа 286 на $\frac{5^2-1}{4} = 6$, $\frac{5^3-1}{4} = 31$, $\frac{5^4-1}{4} = 156$,

$\frac{5^5-1}{4} = 781$ соответственно равны 4, 7, 130 и 286. Значит, a_1 не может быть меньше 4.

Пример последовательности 4, 239, 286 показывает, что a_1 может равняться 4.

Ответ: а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Справочное издание

**Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К.,
Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И.,
Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э.**

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, Е. Ю. Лысова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7 915 222 15 42, +7 926 063 81 80.

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).